6- Transformaciones

Sea X una v.a. con función de distribución $f(x)$, en esta parte estaremos interesados en

$$Y = g(X) \quad \text{v.a. ¿?}$$

en donde $\underline{g}$ es alguna función de interés. Empezaremos en el caso univariado y seguiremos al caso multivariado.

Transformaciones para una sola variable aleatoria

- Variables aleatorias discretas

  - Caso fácil $\underline{g}$ es biyectiva $\Rightarrow$ g^{-1} existe.

Sea X la v.a. uniforme discreta en $-2, 2$

$$V = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$f(x) = P(X = x) = 1/5 \quad , \text{ para } x \in V$$

$$Y = g(X) = 2X$$

$$\Rightarrow \quad V_Y = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$$

$$f(y) \quad P(Y=y) = P(g(X)=y)$$

$$= P(X = g^{-1}(y)) = \frac{1}{5}$$

- Caso general $Y = g(X) = 2|X|$

$$f(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y)$$

$$= \sum_{x : g(x)=y} P(X=x)$$

$$V_Y = \{0, 4, 8\}$$

$$f_Y(0) = P(Y=0) = P(X=0) = 1/5$$

$$f_Y(4) = P(Y=4) = P(X=-2) + P(X=2) = 2/5$$

$$f_Y(8) = P(Y=8) = P(X=-4) + P(X=4) = 2/5$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(x)), & \text{si } g \text{ es biyectiva} \\ \sum_{x : g(x)=y} f_X(x), & \text{eoc} \end{cases}$$

- Variables aleatorias continuas

Si X es una v.a. continua con función de distribución $f(x)$

y g es una función

$\Rightarrow$ nos interesa $Y = g(X)$

Aquí vamos a pedir que g sea

- Diferenciable
- Estrictamente monótona

$\Rightarrow$ g^{-1} existe

De manera general

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$= P(X \leq g^{-1}(y)) \leftarrow \text{ } g(x) \text{ es estrictamente creciente}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| f_X(g^{-1}(y))$$

Ejemplo

Sea X la v.a. continua con

$$f(x) = 4x^3 \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$$

y sea $Y = g(X) = 1/X$

encuentre $f_Y(y)$

Como $y = g(x) = 1/x \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{y} = y^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -1\, y^{-2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2} 4\left(1/y\right)^3 = 4\, 1/y^5\, \mathbb{1}_{[1,\infty)}(y)$$

Ejemplo Sea $X \sim U(0,1)$

$$\Rightarrow f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,1)} \Rightarrow F_X(x) = x$$

$$Y = -\beta \log(X)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-\beta \log(X) \le y)$$
$$= P(\log(X) \geq -\beta y)$$
$$= 1 - P(\log(X) \le -\beta y)$$
$$= 1 - P(X \le e^{-\beta y})$$
$$= 1 - e^{-\beta y}$$

$$\Rightarrow Y \sim Exp(\beta)$$

Sea $X \sim U(0,1)$

$$Y = -\beta \log(X) \sim Exp(\beta)$$

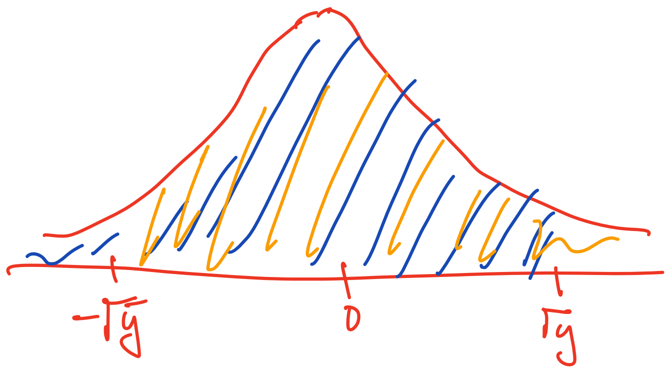
Sea $X \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow Y = X^2$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$$
$$= P(|X| \le \sqrt{y})$$

$$= P(X \leq \sqrt{y}) + P(-X \leq \sqrt{y})$$

$$= P(X \leq \sqrt{y}) + P(X \geq -\sqrt{y}) = 2P(X \leq \sqrt{y})$$



$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 2\, y^{1/2-1} f_X(\sqrt{y})$$

$$= 2\, y^{1/2-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} \quad , y>0$$

$$Y \sim \chi^2_{(1)}$$

Sumas de v.a. independientes

Sea $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ v.a. independientes con

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(\Sigma \lambda_i)$$

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{Yt}) = \mathbb{E}(e^{t \Sigma x_i})$$

$$= \mathbb{E}(e^{tX_1} e^{tX_2} \cdots e^{tX_n})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = e^{\sum \lambda_i (e^t - 1)}$$

Si $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i) \Rightarrow M_{X_i}(t) = e^{\lambda_i (e^t - 1)}$

Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ independientes

$$\Rightarrow \quad Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i +$$

$$M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \sigma_i^2 t^2/2}$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{a_i t X_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t) = \prod_{i=1}^{n} e^{a_i \mu_i t + a_i^2 \sigma_i^2 t^2/2}$$

$$= e^{\sum a_i \mu_i + \sum a_i^2 t_i^2/2}$$

$$Y \sim N\left(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Si $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma$ y $a_i = 1/n$

$$\Rightarrow \quad Y = \overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a independientes $N(\mu, \sigma^2)$

$$\Rightarrow \overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a Gamma(α_i, β)

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{¿?}$$

$$M_{X_i}(t) = (1 - t/\beta)^{-\alpha_i}$$

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = (1 - t/\beta)^{-\sum \alpha_i}$$

$$\Rightarrow \quad \sum X_i \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$$